41 ベクトルと内積

344

(1)

$$\vec{x}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$
$$=(1-t)\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2t-1\\3t-1\\2t\end{pmatrix}$$

$\vec{a}$ と $\vec{x}$ のなす角が $45°$ のとき，$\cos 45°=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{|\vec{a}||\vec{x}|}$ すなわち $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{|\vec{a}||\vec{x}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

これと，

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{|\vec{a}||\vec{x}|}=\frac{-1\cdot(2t-1)+(-1)\cdot(3t-1)+2t\cdot 0}{\sqrt{2}\sqrt{(2t-1)^2+(3t-1)^2+(2t)^2}}$$
$$=\frac{-5t+2}{\sqrt{2}\sqrt{17t^2-10t+2}}$$

より，$\dfrac{-5t+2}{\sqrt{2}\sqrt{17t^2-10t+2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，$\dfrac{-5t+2}{\sqrt{17t^2-10t+2}}=1$ すなわち $\sqrt{17t^2-10t+2}=-5t+2$ より，

$17t^2-10t+2=(-5t+2)^2$ かつ $-5t+2\geq 0$ すなわち $2(4t-1)(t-1)=0$ かつ $t\leq\dfrac{2}{5}$ $\therefore t=\dfrac{1}{4}$

(2)

$$\left|\vec{b}-t\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{a}|^2$$
$$=|\vec{a}|^2\left(t-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right)^2-\frac{\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2}{|\vec{a}|^2}+\left|\vec{b}\right|^2$$

より，$t=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}$ で $\left|\vec{b}-t\vec{a}\right|$ は最小となる。よって，$t_0=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}$

ゆえに，

$$\vec{a}\left(\vec{b}-t_0\vec{a}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}-t_0|\vec{a}|^2$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}|\vec{a}|^2$$
$$=0$$

345

与式より，$\left|\vec{a}+k\vec{b}\right|^2=\left(\sqrt{3}\left|k\vec{a}-\vec{b}\right|\right)^2$

また，$|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=1$ より，

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+k\vec{b}\right|^2&=|\vec{a}|^2+2k\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2\left|\vec{b}\right|^2\\&=2k\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}\left|k\vec{a}-\vec{b}\right|\right)^2&=3\left(k^2|\vec{a}|^2-2k\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2\right)\\&=-6k\vec{a}\cdot\vec{b}+3k^2+3\end{aligned}$$

よって，$2k\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2+1=-6k\vec{a}\cdot\vec{b}+3k^2+3$　すなわち，$8k\vec{a}\cdot\vec{b}=2k^2+2$

これと $k\neq 0$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{k^2+1}{4k}$　・・・(答)

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0\leq\theta\leq\pi)$ とすると，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=\cos\theta$

よって，$-1\leq\vec{a}\cdot\vec{b}\leq 1$

これと $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{k^2+1}{4k}$ より，$-1\leq\dfrac{k^2+1}{4k}\leq 1$

$k>0$ だから，各辺に $4k$ を掛けると，$-4k\leq k^2+1\leq 4k$

よって，$\begin{cases}k^2-4k+1\leq 0\\k^2+4k+1\geq 0\end{cases}$（ただし，$k>0$）

k のとりうる値の範囲は，この連立不等式を解くことにより，

$2-\sqrt{3}\leq k\leq 2+\sqrt{3}$　・・・(答)

346

(1)

次図において，BC//DF，DC//FC，BC＝CD＝1 より，

四角形 BCDF は 1 辺の長さが 1 のひし形である。

また，AO//BD より△FAO∽FDB がいえるから，AO：DB＝FA：FD

すなわち 1：DB＝AD－1 ：1　・・・①

ここで，△OAD≡△ABO≡△BCA≡△CDB≡△DOC より，

AD＝BO＝CA＝DB＝OC＝t　・・・②　とすると，

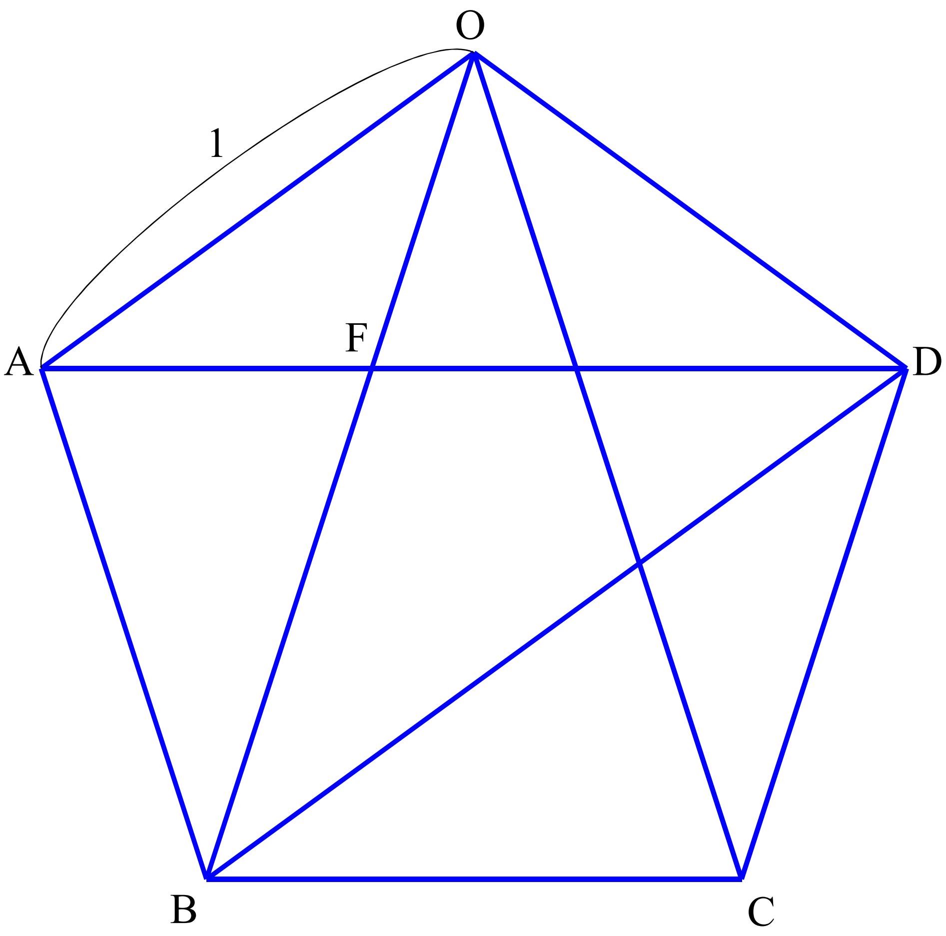
①，②より，1：t＝t－1 ：1

これより，$t(t-1)=1$　すなわち $t^2-t-1=0$

これと解の公式および $t>0$ より，$t=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　・・・③

②，③より，OB＝$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

これと $\left|\overrightarrow{\mathrm{DC}}\right|=k\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$ および $\left|\overrightarrow{\mathrm{DC}}\right|=1$ より，$1=k\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　$\therefore k=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　・・・(答)



②，③および OABCD が正五角形であることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(-\vec{a}+\vec{b}\right)$$

よって，$\vec{x}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\left(-\vec{a}+\vec{b}\right)$ ・・・(答)

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\vec{x}-\vec{a}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(-\vec{a}+\vec{b}\right)-\vec{a}\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(-\vec{a}+\vec{b}\right)-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{a}$$
$$=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{a}+\vec{b}$$

よって，$\vec{y}=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ ・・・(答)

(2)

△OAB で余弦定理より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\theta$

ここで，条件より $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=1$，②と③より $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

よって，$1=1+\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2-2\cdot1\cdot\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\cos\theta$ $\quad\therefore\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

(3)

$$\vec{a}\cdot\vec{x}=\vec{a}\cdot\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(-\vec{a}+\vec{b}\right)\right\}$$
$$=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\left|\vec{a}\right|^2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\left|\vec{a}\right|^2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$
$$=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$
$$=\frac{1}{2}$$

347

(1)

$$\begin{aligned}\alpha &= \vec{p}\cdot\vec{a}\\ &= 1\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1\cdot 0\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= \vec{q}\cdot\vec{a}\\ &= -1\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cdot 0\\ &= 1\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\vec{b} &= \vec{p}-\alpha\vec{a}\\ &= \vec{p}-\vec{a}\\ &= \left(1,\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ 1\right)-\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)\\ &= \left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{6},\ 1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{q}-\beta\vec{a}-\frac{\vec{q}\cdot\vec{b}}{|\vec{q}|^2}\vec{b}\\ &= \vec{q}-\vec{a}-\frac{\vec{q}\cdot\vec{b}}{|\vec{q}|^2}\vec{b}\\ &= \left(-1,\ \sqrt{3},\ 2\right)-\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)-\frac{\left(-1,\ \sqrt{3},\ 2\right)\cdot\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{6},\ 1\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+1^2}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{6},\ 1\right)\\ &= \left(-1,\ \sqrt{3},\ 2\right)-\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{6},\ 1\right)\\ &= \left(-\frac{15}{8},\ \frac{5\sqrt{3}}{8},\ \frac{5}{4}\right)\end{aligned}$$

(2)

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ より，OA⊥OB，OC⊥△OAB

よって，$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=\frac{1}{3}\cdot\frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{2}\cdot|\vec{c}|=\frac{5\sqrt{3}}{18}$

348

四面体 ABCD において，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ であることと $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} = 0$ は同値である。

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ ならば，すなわち，$\vec{c}\left(\vec{d} - \vec{b}\right) = 0$ より，$\vec{c} \cdot \vec{d} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ ならば，

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BC}^2 - \left(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{CD}^2\right) &= \left|\vec{d}\right|^2 + \left|\vec{c} - \vec{b}\right|^2 - \left(\left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{d} - \vec{c}\right|^2\right) \\ &= 2\left(\vec{c} \cdot \vec{d} - \vec{b} \cdot \vec{c}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{CD}^2$ が成り立つ。
逆に，$\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{CD}^2$ すなわち $\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BC}^2 - \left(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{CD}^2\right) = 0$ ならば

$\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BC}^2 - \left(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{CD}^2\right) = 2\vec{c}\left(\vec{d} - \vec{b}\right)$ より，$\vec{c}\left(\vec{d} - \vec{b}\right) = 0$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ が成り立つ。

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ が垂直となる必要十分条件は $\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{CD}^2$ である。

349

$\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$，$\vec{q} = 2\vec{a} - \vec{b}$ とおくと，$\vec{a} = \dfrac{1}{5}\left(\vec{p} + 2\vec{q}\right)$，$\vec{b} = \dfrac{1}{5}\left(2\vec{p} - \vec{q}\right)$

$\left|\vec{p}\right| = 2$，$\left|\vec{q}\right| = 2$，$\vec{p} \cdot \vec{q} = 4\cos\theta$ であるから，

$$\begin{aligned}\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 &= \frac{1}{5^2}\left|3\vec{p} + \vec{q}\right|^2 \\ &= \frac{1}{5^2}\left(9\left|\vec{p}\right|^2 + 6\vec{p} \cdot \vec{q} + \left|\vec{q}\right|^2\right) \\ &= \frac{1}{5^2}\left(40 + 24\cos\theta\right)\end{aligned}$$

よって，$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \dfrac{\sqrt{40 + 24\cos\theta}}{5}$

これと，$-1 \leq \cos\theta \leq 1$ より，$\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$ は，$\theta = 0$ で最大値 $\dfrac{8}{5}$ を，$\theta = \pi$ で最小値 $\dfrac{4}{5}$ をとる。

350

(1)

条件より，

$$|\vec{c}|^2=\left|p\vec{a}+q\vec{b}\right|^2$$
$$=p^2|\vec{a}|^2+2pq\vec{a}\cdot\vec{b}+q^2\left|\vec{b}\right|^2$$
$$=p^2-pq+q^2$$

$\therefore\ p^2-pq+q^2=1$　・・・①

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\left(p\vec{a}+q\vec{b}\right)$$
$$=p|\vec{a}|^2+q\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=p-\frac{q}{2}$$

よって，$p-\dfrac{q}{2}=0$　すなわち $q=2p$　・・・②

②を①に代入し，q を消去し，p について整理すると，$3p^2=1$

$p>0$ より，$p=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

これと②より，$q=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(2)

解法 1：(1)を利用して解く

$\vec{a}$ と $\vec{c}$ は互いに独立だから，平面上のベクトル $\vec{x}$ は $\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{c}$ （s, t は実数）と表せる。

よって，条件より，

$$|\vec{x}|^2=|s\vec{a}+t\vec{c}|^2$$
$$=s^2|\vec{a}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{c}+t^2|\vec{c}|^2$$
$$=s^2+t^2$$

ゆえに，$|\vec{x}|=\sqrt{s^2+t^2}$　・・・③

(1)より $\vec{c}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{a}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\vec{b}$ だから，

$$\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{c}$$
$$=s\vec{a}+t\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{a}+\frac{2}{\sqrt{3}}\vec{b}\right)$$
$$=\left(s+\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\vec{a}+\frac{2t}{\sqrt{3}}\vec{b}$$

よって，

$$\vec{a}\cdot\vec{x}=\vec{a}\cdot\left\{\left(s+\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\vec{a}+\frac{2t}{\sqrt{3}}\vec{b}\right\}$$

$$=\left(s+\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\left|\vec{a}\right|^2+\frac{2t}{\sqrt{3}}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=s+\frac{t}{\sqrt{3}}-\frac{t}{\sqrt{3}}$$

$$=s$$

$\therefore -1\leq s\leq 1$　・・・④

$$\vec{b}\cdot\vec{x}=\vec{b}\cdot\left\{\left(s+\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\vec{a}+\frac{2t}{\sqrt{3}}\vec{b}\right\}$$

$$=\left(s+\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{2t}{\sqrt{3}}\left|\vec{b}\right|^2$$

$$=-\frac{s}{2}-\frac{t}{2\sqrt{3}}+\frac{2t}{\sqrt{3}}$$

$$=-\frac{s}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$\therefore 1\leq -\frac{s}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\leq 2$

$\therefore \sqrt{3}t-4\leq s\leq \sqrt{3}t-2$　・・・⑤

s と t の存在範囲は④と⑤を満たす領域だから，これを図示すると，

その領域は，次図の青色斜線部（青色境界線を含む）となる。

また，③より，$\left|\vec{x}\right|$ は原点を中心とする円の半径を表す。

よって，

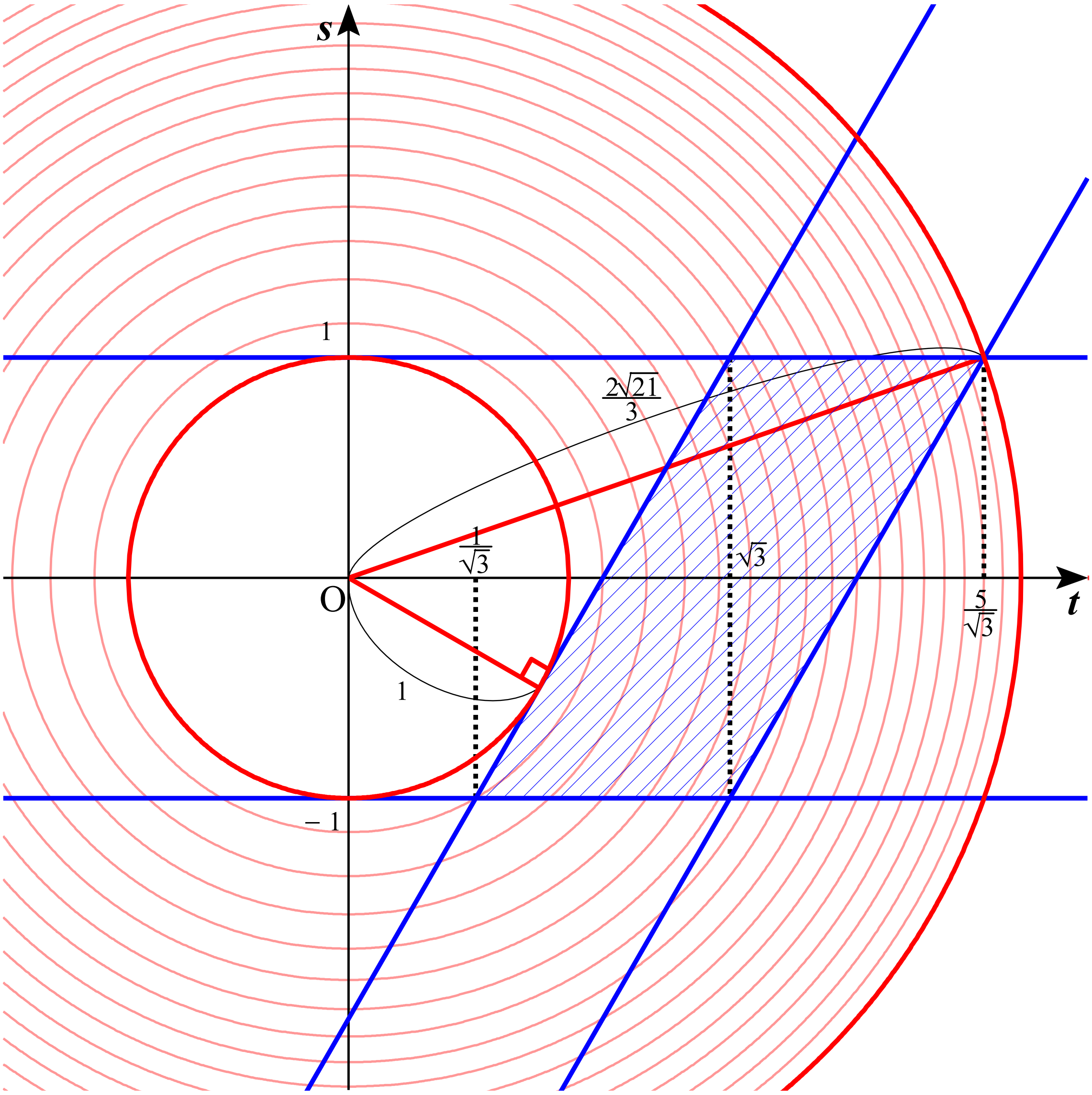
半径 $\left|\vec{x}\right|$ の最小値は，

原点と直線 $s=\sqrt{3}t-2$ すなわち $s-\sqrt{3}t+2=0$ との距離より，$\dfrac{\left|0-\sqrt{3}\cdot 0+2\right|}{\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}}=1$

半径 $\left|\vec{x}\right|$ の最大値は，

原点と点 $\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}},1\right)$ の距離より，$\sqrt{\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)^2+1^2}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

ゆえに，半径 $\left|\vec{x}\right|$ のとりうる値の範囲は $1\leq\left|\vec{x}\right|\leq\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$



s
1
$\frac{2\sqrt{21}}{3}$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sqrt{3}$
O
$\frac{5}{\sqrt{3}}$
t
1
− 1

解法 2：(1)を無視して解く

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は互いに独立だから，平面上のベクトル $\vec{x}$ は $\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{b}$ （s, t は実数）と表せる。

よって，条件より，

$$
\begin{aligned}
|\vec{x}|^2 &= |s\vec{a}+t\vec{b}|^2 \\
&= s^2|\vec{a}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2 \\
&= s^2-st+t^2
\end{aligned}
$$

ゆえに，$|\vec{x}|=\sqrt{s^2-st+t^2}$　・・・③

また，

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{x} &= \vec{a}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}) \\
&= s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b} \\
&= s-\frac{t}{2}
\end{aligned}
$$

より，$-1\leq s-\dfrac{t}{2}\leq 1$

よって，$s-\dfrac{t}{2}=u$　・・・④　とおくと，$-1\leq u\leq 1$　・・・⑤

$$
\begin{aligned}
\vec{b}\cdot\vec{x} &= \vec{b}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}) \\
&= s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2 \\
&= -\frac{s}{2}+t
\end{aligned}
$$

より，$1\leq -\dfrac{s}{2}+t\leq 2$

よって，$-\dfrac{s}{2}+t=v$　・・・⑥　とおくと，$1\leq v\leq 2$　・・・⑦

④，⑥より，$s=\dfrac{2}{3}(2u+v)$　・・・⑧　$t=\dfrac{2}{3}(u+2v)$　・・・⑨

⑧と⑨を③に代入すると，

$$
\begin{aligned}
|\vec{x}| &= \sqrt{\left\{\frac{2}{3}(2u+v)\right\}^2-\left\{\frac{2}{3}(2u+v)\right\}\left\{\frac{2}{3}(u+2v)\right\}+\left\{\frac{2}{3}(u+2v)\right\}^2} \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\left(u+\frac{v}{2}\right)^2+\frac{3}{4}v^2}
\end{aligned}
$$

ここで，⑤と⑦より，

$-\frac{1}{2} \leq u+\frac{v}{2} \leq 2 \quad \therefore 0 \leq \left(u+\frac{v}{2}\right)^2 \leq 4$

$1 \leq v^2 \leq 4 \quad \therefore \frac{3}{4} \leq \frac{3}{4}v^2 \leq 3$

よって，$\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{0+\frac{3}{4}} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\left(u+\frac{v}{2}\right)^2+\frac{3}{4}v^2} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{4+3}$

すなわち$1 \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\left(u+\frac{v}{2}\right)^2+\frac{3}{4}v^2} \leq \frac{2\sqrt{21}}{3} \quad \therefore 1 \leq |\vec{x}| \leq \frac{2\sqrt{21}}{3}$

351

(1)

対角線の長さ

346(1)で t を求めたのと同じようにして求めることにより，$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}$

△OAB について，余弦定理より，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}$$
$$= 1^2 + 1^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$= 2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

これと，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ より，$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2-2\vec{a}\cdot\vec{b} \quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$

(2)

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

対角線の長さが辺の長さの$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$倍であることと $\overrightarrow{\mathrm{AD}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$= \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$= \vec{a} - \vec{c} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{c}$$
$$= \vec{a} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CE}}+\overrightarrow{\mathrm{EF}}$

ここで，対角線の長さが辺の長さの$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$倍であることと$\overrightarrow{\mathrm{BE}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{EF}}$より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CE}}&=\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}\\&=\vec{b}-\vec{c}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{c}\\&=\vec{b}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EF}}&=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}\\&=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\vec{a}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{c}\right)\\&=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{a}+\vec{c}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CE}}+\overrightarrow{\mathrm{EF}}\\&=\vec{c}+\vec{b}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{c}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{a}+\vec{c}\\&=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

(3)

OH は平面 ABD の垂線だから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$かつ$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$ ・・・①

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\vec{a}+s\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\frac{1+\sqrt{5}}{2}t\vec{c}\\&=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}t\vec{c}\end{aligned}$$

$\therefore\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}t\vec{c}$ （s, t は実数） ・・・②

②より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\left\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}t\vec{c}\right\}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\\&=(1-2s)\vec{a}\cdot\vec{b}-(1-s)\left|\vec{a}\right|^2+s\left|\vec{b}\right|^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}t\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}t\vec{c}\cdot\vec{a}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\left\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}t\vec{c}\right\}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{c}\right)$$
$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left\{(1-s)\vec{a}\cdot\vec{c}+s\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}t\left|\vec{c}\right|^2\right\}$$

ここで，$\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2=1$

また，(1)と同様にして，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}=\vec{a}\cdot\vec{b}$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1-2s)\vec{a}\cdot\vec{b}-(1-s)\left|\vec{a}\right|^2+s\left|\vec{b}\right|^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}t\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}t\vec{c}\cdot\vec{a}$$
$$=(1-2s)\vec{a}\cdot\vec{b}+2s$$
$$=(1-2s)\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{4}+2s-1$$
$$=\frac{3+\sqrt{5}}{4}(2s-1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}t\right)$$
$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}t\right)$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(t-\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)$$

ゆえに，①より，$2s-1=0$ かつ $t-\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}=0$　すなわち $s=\dfrac{1}{2}$，$t=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$

これを②に代入し，整理することにより，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{c}$